Beispiele für die Verwirklichung allgemeiner Ziele des Mathematikunterrichtes

Heinrich Bürger, Wien

1. Die Bildungs- und Lehraufgabe des Mathematikunterrichtes

Die österreichischen Lehrpläne für Mathematik sind in drei Teile gegliedert: Bildungs- und Lehraufgabe - Lehrstoff - Didaktische Grundsätze. Vielfach wird dabei der Lehrstoff als der wesentliche Teil der Lehrpläne angesehen, dem das Hauptinteresse gilt. Die Bildungs- und Lehraufgabe, in der die allgemeinen Ziele des Mathematikunterrichtes festgelegt sind, wird oft kaum beachtet. Das bedeutet aber, daß diese allgemeinen Ziele nicht die dominierende Rolle für den Mathematikunterricht spielen, die ihnen zukommt: Solche Zielsetzungen sollen nämlich mitbestimmend dafür sein, in welcher Art in den einzelnen Stoffgebieten der Mathematikunterricht geführt werden soll; diese allgemeinen Ziele sollen außerdem maßgeblich sein für die Auswahl der Einzelthemen und Aufgaben durch die Lehrer und Lehrbuchautoren.

Die im Lehrplan enthaltenen allgemeinen Ziele werden zum Teil deshalb nur in geringem Maße beachtet, weil sie zu wenig präzise formuliert sind und weil im Lehrplan keine Hinweise enthalten sind, wie sie in den einzelnen Stoffgebieten verwirklich werden können. Im folgenden soll nun gezeigt werden, wie durch gewisse Aufgabentypen, zu denen Beispiele gegeben werden, allgemeine Ziele bei der Behandlung der Stoffgebiete der 5. Klasse "Potenzen mit ganzzahligen Exponenten" und "Lineare Funktionen" angestrebt werden können. Die angeführten Aufgaben erfordern Aktivitäten der Schüler, die allgemeinen Zielen zugeordnet werden können. Bei jedem Beispiel werden in diesem Beitrag diese Aktivitäten angegeben und einem allgemeinen Ziel der Bildungs- und Lehraufgabe zugeordnet.

Zunächst soll deshalb die Bildungs- und Lehraufgabe für den Mathematikunterricht der Oberstufe der AHS angegeben werden:

(Prod)	Anleitung zu selbständiger und produktiver geistiger Tätigkeit.
(Ex),(Krit)	Ausbildung des exakten und kritischen Denkens.
(Log)	Förderung der Fähigkeit zu logischem Schließen.
(Spra)	Förderung des exakten sprachlichen Ausdrucks.
(Abst)	Schulung des Abstraktionsvermögens.
(Prob)	Förderung der Fähigkeit zum Lösen von mathematischen Problemen.
(Bew)	Schulung in wichtigen mathematischen Beweisverfahren.
(Ansch)	Einführung in den Gebrauch der mathematischen Fachsprache und Fachsymbolik.
(Rech)	Schulung der Geläufigkeit in den wichtigsten Rechenverfahren.
(Kult),(Wiss)	Vermittlung von Einsichten in die kulturgeschichtliche und wissenschaftstheoretische Bedeutung der Mathematik.
(Anw)	Entwicklung der Fähigkeit zur mathematischen Behandlung von Problemen aus den Naturwissenschaften, den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften und aus anderen Bereichen.

2. Aufgaben zum Thema "Potenzen mit ganzzahligen Exponenten"

In der 5. Klasse kann vorausgesetzt werden, daß die Schüler

- den Begriff einer Potenz a^n mit $n \in N$,
- einfache Rechnungen mit Potenzen der Art $x^2.x^3 = x^5$, $\frac{a^4}{a^3} = a$, $(a.b)^2 = a^2b^2$ ausführen können, wobei diese Rechnungen nicht unbedingt die Kenntnis der Rechengesetze für Potenzen voraussetzen, sondern auch durch unmittelbares Anwenden der Definition und Potenzen ausführbar sind,
- solche einfachen Rechnungen auch beim Multiplizieren und Dividieren von Polynomen anwenden können.

Diese Vorkenntnisse der Schüler werden bei den folgenden Aufgabenstellungen vorausgesetzt.

(1) Bewußtmachen der Verwendung von Rechengesetzen bei vertrauten Rechnungen und Formulieren dieser Gesetze.

Beispiel 1: Man mulitpliziere x^4, x^2, $a^5.a^3$ und $u^7.u^{11}$. Man versuche ein Rechengesetz (eine Formel) aufzustellen, das diese Rechnungen als Sonderfall enthält. Dieses Gesetz ist auch in Worten zu formulieren.

Beiträge zu allgemeinen Zielen:

- Erkennen von Gesetzmäßigkeiten [diese Aktivität kann dem Lernziel (Prod) der Bildungs- und Lehraufgabe zugeordnet werden.]
- Formales Beschreiben von mathematischen Sachverhalten [(Symb)]
- Verbales Beschreiben formaler Darstellungen [(Symb)]

(2) Finden von Beweisen von Rechengesetzen für Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{N}$ durch Verallgemeinern von Überlegungen an speziellen Beispielen.

Beispiel 2: Warum ist $a^3.a^4 = a^7$? Warum ist $a^n.a^m = a^{n+m}$, falls $n,m \in \mathbb{N}$?

Beiträge zu Zielen:

- Verallgemeinern von Überlegungen [(Prod)]
- Beweisen [(Ex),(Bew)]

(3) Bewußtes Anwenden von Rechengesetzen beim Rechnen mit Potenzen.

Beispiel 3: Der Ausdruck $(\frac{2x^2}{y^3})^4.x^2$ ist unter Verwendung von Rechengesetzen schrittweise so umzuformen, daß man $\frac{16x^{10}}{y^{12}}$ erhält. Bei jedem Umformunsschritt ist genau ein Rechengesetz für Potenzen zu verwenden, das anzugeben ist:

Beiträge zu Zielen:

- Analysieren von Termen[(Symb), (Rech), (Prod)]
- Substituieren in Formeln [(Symb)]
- Begründen mit vorgegebenen Argumenten [(Ex), (Bew)]
- Arbeiten unter bewußter Verwendung von Regeln (Sätzen) [(Ex)]

(4) Analysieren und Umformen komplexer Ausdrücke.

Beispiel 4: (a) Die "Struktur" des Terms $(\frac{x^2}{y^3})^4 - z^2$ kann in der Form $(-)^4 - \square$ dargestellt werden. Stelle in ähnlicher Form die Struktur von $(\frac{a^n}{b^{n-1}} - \frac{a^{n-1}}{b^n})^2 \cdot \frac{b^{n+1}}{a^{n+1}}$ dar. (b) Vereinfache diesen Term.

Beiträge zu Zielen:

(a) Analysieren von Termen [(Symb), (Rech), (Prod)]

- Schematisches Darstellen [(Prob)]

(b) Kombinieren vertrauter Fertigkeiten [(Prod)]

(5) Finden von Beispielen zu Rechengesetzen.

Beispiel 5: Man gebe ein Umformungsbeispiel an, bei dem die Rechengesetze $a^n . a^m = a^{n+m}$ und $(a^n)^m = a^{n.m}$ verwendet werden müssen.

Beiträge zu Zielen:

- Finden von Beispielen mit vorgegebenen Eigenschaften [(Prod)]

(6) Beweis von Rechengesetzen für Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{Z}$.

Beispiel 6: (Vorausgesetzt ist, daß $(a^k)^l = a^{k.l}$ für $k \in \mathbb{Z}^+$, $l \in \mathbb{Z}^-$ bereits bewiesen wurde.)

(a) Man beweise, daß $(a^k)^l = a^{k.l}$ für $k \in \mathbb{Z}^-$, $l \in \mathbb{Z}^+$ gilt, unter Verwendung von Rechengesetzen für Potenzen mit Exponenten aus $\mathbb{N}$ und der Definition von a^{-n} $(n \in \mathbb{N})$. Bei jedem Beweisschritt ist höchstens ein solches Gesetz oder die Definition zu verwenden und jeweils anzuführen.

(b) Welche Möglichkeiten für $k, l \in \mathbb{Z}$ müssen noch betrachtet werden, um $(a^k)^l = a^{k.l}$ vollständig zu beweisen?

Beiträge zu Zielen:

(a) Finden von Beweisen nach einem bekannten Beweismuster [(Prod), (Bew)].

- Begründen (Beweisen) mit vorgegebenen Argumenten [(Ex), (Bew)]

(b) Fallunterscheidungen vornehmen, Vollständigkeit einer Argumentation überblicken [(Prob), (Ex)]

Teil (a) dieser Aufgabe bietet auch eine gute Möglichkeit für "Reflektieren über Mathematik", nämlich darzulegen, daß das Beweisen als eine Form des Argumentierens mit vorgegebenen (als richtig angesehenen) Argumenten angesehen werden kann und somit mathematische Sätze Aussagen der Art "wenn A richtig, dann B richtig" sind. [Dies kann als ein Beitrag zum allgemeinen Lernziel (Wiss) angesehen werden]. Ebenso kann dargelegt werden, daß eine gemeinsame Argumentationsbasis Voraussetzung für ein sinnvolles Diskutieren ist, und so ein Beitrag zu einem allgemeinen Unterrichtsziel "Kommunikationsbereitschaft" geleistet werden.

(7) Definition von a^k mit $k \in \mathbb{Z}^-$ als Beispiel einer Begriffserweiterung, wobei die ursprüngliche Bedeutung von a^k mit $k \in \mathbb{N}$ nicht herangezogen werden kann.

<u>Beispiel 7</u>: (a) Gilt das Rechengesetz $a^k . a^l = a^{k+l}$ mit $k,l \in \mathbb{Z}$ auch dann, wenn man $a^0 = 0$ oder $a^{-n} = -a^n$ $(n \in \mathbb{N})$ definiert hätte?

(b) Kann man Begriffe beliebig definieren? Kann man Namen und Symbole willkürlich wählen?

<u>Beiträge zu Zielen</u>:

Reflektieren über Mathematik [(Wiss)]

(8) Rechnen mit Zahlen in Gleitkommadarstellung in Anwendungssituationen.

<u>Beispiel 8</u>: Ein (annähernd kugelförmiges) Natriumatom hat einen Durchmesser von etwa $3{,}8 . 10^{-7}$ mm. Wenn man Kugeln in dichtester Packung lagert, so füllen sie etwa 74% des zur Verfügung stehenden Raumes aus. Wie viele Natriumatome füllen bei dichtester Packung einen Raum von 1 mm^3 aus?

<u>Beiträge zu Zielen</u>:

- Anwenden bekannter Rechenmethoden bei nichtmathematischen Sachverhalten [(Prod), (Prob), (Anw)].

- Festigen elementarer Kenntnisse und Fertigkeiten [(Rech)]
- Genauigkeit und Größenordnung abschätzen [(Krit), (Anw)]

(9) Untersuchungen über die Gültigkeit von Rechengesetzen beim Rechnen mit "Maschinenzahlen". (Vorausgesetzt wird eine Rechenmaschine, die Zahlen in der Form $a.10^k$ anzeigt, wobei $0,1 \leq a < 1$ ist, und die Dezimaldarstellung von a genau 4 Nachkommastellen enthält. Intern soll diese Maschine mit einer Genauigkeit von 8 Nachkommastellen rechnen können.)

<u>Beispiel 9</u>: Man berechne $(a+b).c = a.c + b.c$ für die Maschinenzahlen:

(a) $a = 0{,}2000.10^{-1}$, $b = 0{,}4000.10^{-5}$, $c = 0{,}3000.10^{1}$

(b) $a = 0{,}2000.10^{-1}$, $b = 0{,}4000.10^{-5}$, $c = 0{,}1000.10^{1}$

<u>Beiträge zu Zielen</u>:

- Erkennen der beschränkten Gültigkeit von Aussagen, deren Gültigkeit unzweifelhaft erschien [(Krit)]
- Festigung von Rechenfertigkeiten [(Rech)]

3. Aufgaben zum Thema "Lineare Funktionen"

Es wird vorausgesetzt, daß die Schüler

- den Begriff und die Definition einer Funktion kennengelernt haben,
- den Begriff des Graphen einer Funktion f als Menge der Paare (x,f(x)) kennen,
- Elemente des Graphen als Punkte in einem Koordinatensystem und damit auch Graphen einfacher reeller Funktionen (insbesondere auch linearer Funktionen) zeichnen können.

Diese Vorkenntnisse werden bei den folgenden Aufgabenstellungen vorausgesetzt.

(1) Nachweis, daß die Punkte des Graphen einer linearen Funktion auf einer Geraden liegen.

<u>Beispiel 10</u>: (a) Man versuche anhand einer Zeichnung festzustellen,

ob die Punkte $A=(2;2,4)$, $B=(4;3,8)$, $C=(4,5;4,2)$ auf einer Geraden liegen. Man überprüfe anschließend durch Rechnung diese Feststellung.[1)]

(b) Man untersuche durch Rechnung, ob die Punkte $A=(2;f(2))$, $B=(4;f(4))$, $X=(4,5;f(4,5))$ des Graphen der Funktion $f\colon x \to 0,7x+1$ auf einer Geraden liegen.

(c) Man weise durch Rechnung nach, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Punkte $A=(2;f(2))$, $B=(4;f(4))$ und $X=(x;f(x))$ des Graphen der Funktion $f\colon x \to 0,7x+1$ auf einer Geraden liegen.

<u>Beiträge zu Zielen</u>:

- Erkennen, daß Zeichnungen geometrische Sachverhalte nur mangelhaft wiedergeben und für Argumentationen nur beschränkt verwendbar sind. [(Krit), (Wiss)]
- Verallgemeinern von Überlegungen [(Prod)]
- Beweisen [(Ex), (Bew)]

(2) Erkennen von Bedeutungen der Steigung aus Beispielen

<u>Beispiel 11</u>: Man gebe drei lineare Funktionen mit gleicher Steigung an, zeichne deren Graphen, formuliere eine Vermutung und begründe diese.

<u>Beiträge zu Zielen</u>:

- Variieren einer Situation und Erkennen von Gesetzmäßigkeiten. Überprüfen von Vermutungen [(Prod), (Prob)]
- Beschreiben geometrischer Sachverhalte mit algebraischen Methoden [(Symb)]

<u>Beispiel 12</u>: (a) Man untersuche an den Beispielen der Funktionen $x \mapsto 2x-1$, $x \mapsto \frac{1}{2}x+1$, $x \mapsto -2x+3$ die folgende Frage: Wählt man irgendein

---

1) Die Überprüfung durch Rechnung kann unter Zuhilfenahme des Strahlensatzes oder der Vektorrechnung erfolgen.

Argument und vermehrt dieses um 1, in welchem Ausmaß ändern sich dann die entsprechenden Werte einer linearen Funktion?

(b) Man beweise die bei (a) gefundene Antwort für eine beliebige lineare Funktion f.

(c) Dieser Sachverhalt ist an den Schaubildern der drei gegebenen Funktionen zu veranschaulichen.

Beiträge zu Zielen:

(a) Erkennen von Gesetzmäßigkeiten [(Prod), (Prob)]

(b) Formales Beschreiben verbaler Darstellungen [(Symb)]

(c) Geometrisches Interpretieren von verbal oder formal beschriebenen (algebraischen) Sachverhalten. [(Ansch), (Symb)]

Beispiel 13: (a) Eine Zeit-Ort-Funktion sei durch $s(t) = 4{,}2t + 10$ gegeben (t in Sekunden, s(t) in Metern). Man gebe eine Deutung der Steigung dieser Funktion an.

(b) Eine Kostenfunktion sei durch $K(x) = 25x + 10000$ gegeben (K(x) sei der Preis von x Einheiten). Man gebe eine Deutung der Steigung dieser Funktion an.

Beiträge zu Zielen:

- Interpretieren mathematischer Modelle [(Anw)]

(3) Deuten von graphischen Darstellungen linearer Funktionen in Anwendungssituationen.

Beispiel 14: Gegeben sei ein graphischer Fahrplan. (a) Für einen gegebenen Zeitpunkt sind Ort und Geschwindigkeit eines Zuges zu bestimmen. Zu einem gegebenen Ort sind der zugehörige Zeitpunkt und die Geschwindigkeit zu ermitteln.

(b) Durch Ungenauigkeiten in der Zeichnung und beim Ablsesen ist zu erwarten, daß die in (a) gefundenen Werte nicht genau sind. Man versuche die Größe der möglichen Fehler abzuschätzen.

(c) Man bestimme die Länge des Weges, den ein Zug zwischen zwei aufeinanderfolgenden Haltestellen in jeder Minute zurücklegt. Entspricht es der Wirklichkeit, daß in jeder Minute ein gleich langer Weg zurückgelegt wird? Ist die Darstellung der Bewegung des Zuges durch eine lineare Funktion "wirklichkeitsgetreu"? Was kann aus dieser Sicht über die Genauigkeit der Ergebnisse von (a) ausgesagt werden?

(d) Man versuche eine graphische Darstellung der Bewegung des Zuges zwischen den beiden Haltestellen zu zeichnen, die besser der Wirklichkeit entsprechen könnte. (Hinweis: Es ist notwendig, Annahmen zu treffen.)

(e) Welche Gründe kann man anführen, die die Darstellung durch (stückweise) lineare Funktionen rechtfertigen?

<u>Beiträge</u> <u>zu</u> <u>Zielen</u>:

(a) Ablesen von Werten aus graphischen Darstellungen [(Symb)]

(b) Genauigkeit von Ergebnissen abschätzen [(Anw), (Krit)]

(c) Überprüfen mathematischer Modelle. Erkennen des Modellcharakters mathematischer Beschreibungen (die Wirklichkeit wird nur beschränkt richtig wiedergegeben). [(Anw), (Krit), (Wiss)]

(d) Erkennen, daß eine Realsituation durch verschiedene math. Modelle beschrieben werden kann, und daß die "Genauigkeit" eines Modells vom Umfang der Informationen über die Realsituation abhängen kann. [(Anw)]

(e) Beurteilen der Brauchbarkeit von mathematischen Modellen. Rechtfertigen der Wahl eines bestimmten mathematischen Modells. [(Anw), (Krit), (Wiss)]

<u>4. Zur Verwendung der Aufgaben im Unterricht</u>

Die in den beiden letzten Abschnitten vorgestellten Aufgaben sollen Möglichkeiten zur Realisierung allgemeiner Lernziele des Mathematikunterrichtes aufzeigen. Es handelt sich dabei um einen "Maximalkatalog" für diese beiden Stoffgebiete, d.h. es wird häufig nicht möglich sein, alle die angeführten Aufgabentypen zu behandeln, da ja zu den einzelnen Beispielen meist auch Parallelbeispiele erforderlich sein werden. Allerdings sollte auch in den anderen Stoffgebieten der Mathematik nicht nur Wert auf Vermittlung von Kenntnissen und Fertigkeiten gelegt werden, sondern es sollten auch durch entsprechende Aufgabenstellungen die in der Bildungs- und Lehraufgabe des Lehrplans verbindlich festgelegten Ziele <u>planmäßig</u> angestrebt werden. Selbstverständlich ist der Erwerb von Kenntnissen und Fertigkeiten, wie sie dem Lernziel (Rech) entsprechen, ein wichtiges Anliegen des Mathematikunterrichtes, doch sollte stets das gesamte Spektrum der allgemeinen Ziele in einer gewissen Ausgewogenheit angestrebt und nicht einzelne dieser Ziele vernachlässigt werden. Die Auswahl von Einzelthemen und Aufgaben durch den Lehrer sollte in dieser Hinsicht <u>zielbewußt</u> erfolgen. Ein möglichst <u>vielseitiger Unterricht</u>, in dem vielfältige Ziele angestrebt werden, sollte nicht nur deshalb gehalten werden, weil dies vom Lehrplan verlangt wird, sondern vor allem auch um kein einseitiges Bild der Mathematik zu vermitteln und um unterschiedlichen Interessen der Schüler entgegenzukommen.

Die Verbindlichkeit allgemeiner Ziele legt nahe, daß von den Schülern auch bei Leistungsfeststellungen bewußt Aktivitäten gefordert werden, wie sie im Anschluß an die einzelnen Aufgaben als Beiträge zu allgemeinen Zielen genannt wurden. Sobald ein Lehrer sich bewußt wird, auf welche Aktivitäten er bei einer Aufgabe Wert legt, wird er einerseits die Schwierigkeiten einer Aufgabe besser abschätzen und Fehler entsprechend der Zielsetzung besser bewerten können, anderseits wird er eine einseitige, zu starke Betonung einzelner allgemeiner Ziele leichter vermeiden.

Wenn man solche Aufgaben, wie sie hier vorgelegt werden, im Unterricht behandelt, ist es allerdings zweckmäßig, den Schülern klarzumachen, welche Aktivitäten man von ihnen verlangt und welchen Zielen diese Aufgaben dienen. Dem Schüler soll deutlich gemacht werden, daß diese Aufgaben oft von anderer Art sind als die üblichen, bei denen es auf die Berechnung eines eindeutig bestimmten Ergebnisses ankommt; beispielsweise soll er durch solche Aufgaben argumentieren oder die mathematische Sprache handhaben lernen. Grundsätzlich - und nicht nur bei diesen Aufgaben - werden Schüler für den Mathematikunterricht motiviert, wenn man ihnen darlegt, welchen Sinn einzelne Aufgaben und ihr gesamtes Tun im Mathematikunterricht hat.

Abschließend sei noch auf eine Unterrichtsform aufmerksam gemacht, die nicht nur bei diesen Aufgaben, sondern auch bei den üblichen Aufgaben die Schüler zu erhöhter Selbsttätigkeit führt: Jeder Schüler versucht zunächst, die Aufgabe selbständig zu lösen. Bei Schwierigkeiten können Gespräche mit den Mitschülern (Sitznachbarn) oder mit dem Lehrer geführt werden. Der Lehrer beobachtet die Schüler bei ihrer Arbeit und berät einzelen Schüler oder auch alle. Einzelne Lösungsschritte oder auch eine Lösung der Aufgabe werden den Schülern vom Lehrer oder von einem durch ihn bestimmten Schüler - etwa durch Anschreiben an die Tafel - mitgeteilt, sobald diese Schritte bzw. die gesamte Aufgabe von den Schülern (mit oder auch ohne Erfolg) behandelt worden sind. Abschließend kann der Lehrer allenfalls auch noch Erkenntnisse, die aus der Lösung einer Aufgabe erwachsen, hervorheben.

Prof.Dr.Heinrich Bürger
Institut für Mathematik
Universität Wien
Strudlhofgasse 4
A-1090 W i e n